1.7. Performanţele codurilor LDPC

- Metrica folosită pentru evaluarea performanţelor codurilor LDPC este câştigul codării faţă de transmisia necodată care foloseşte aceeaşi modulaţie.
- Calculul teoretic al performanţelor asigurate de codurile LDPC este extrem de complex. În literatură nu există o formulă care să dea expresia probabilităţii de eroare după decodare, în funcţie de SNR, pentru codurile LDPC.
- De aceea valorile acestei probabilităţi se obţin prin simulări, explicarea valorilor lor fiind făcută prin raţionamente şi metode care folosesc o serie de parametri ai codurilor (dimensiuni, mod de construcţie a matricii H) şi ai algoritmului de decodare.

1.7.1. Parametrii principali care afectează performanţele codurilor LDPC

- Cei mai importanţi parametrii care afectează câştigul codării asigurat de un cod LDPC sunt:

- tipul codul, dictat de modalitatea de construcţie a matricii H
- rata codului
- lungimea cuvântului de cod
- valorile parametrilor *k* şi *j*
- diametrul buclei minime (girth); acesta este corelat cu valorile parametrilor *j* şi *k*
- numărul maxim de iteraţii efectuate de algoritmul de decodare

- în continuare vor fi prezentate unele rezultate obţinute pentru coduri random în [1] şi în final vor fi făcute unele consideraţii privind codurile de tip „array” cu matrice triangularizată.
- capacitatea de corecţie a codului e măsurtă prin câştigul codării C_G, definit în (27), folosind modulaţia 2-PSK pe un canal AWGN şi pentru un BER de referinţă $BER_r = 1\cdot10^{-6}$:

$$C_G = SNR_n|_{BERr} - SNR_c|_{BERr} \tag{27}$$

a. Efectul parametrilor j şi k şi al diametrului buclei minime

- Pentru a pune în evidenţă efectul acestor parametri, se vor prezenta curbele BER vs. SNR ale unor coduri având aproximativ aceeaşi rată, adică acelaşi raport între j şi k, şi aceeaşi lungime.
- figura 8 prezintă curbele BER vs. SNR ale unor coduri cu N = 1200 biţi/cuvânt de cod şi R_c = 0.5.
- tabelul 1 prezintă valoarea media a girth-ului şi câştigul codării.

1200	k=4 j=2	k=6 j=3	k=8 j=4	k=10 j=5
g_{av}	12,26	7.27	6.02	6
C_G (dB)	7	10	9.5	9

Tabelul 1

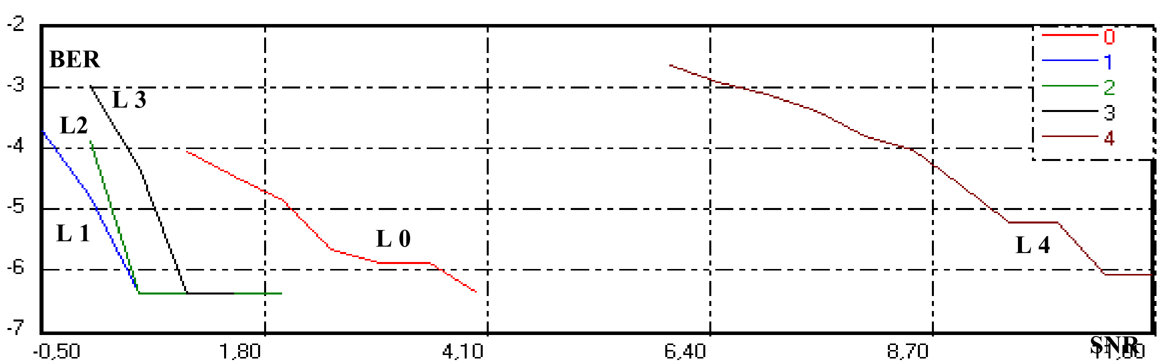

Fig.8 BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 1; N = 1200, R_c= 0.5
Linia 0 – k=4, j=2; Linia 1 - k=6, j=3; Linia 2 – k=8, j=4; Linia 3 – k=10, j=5; Linia 4 – nc

- Rezultatele de mai sus şi simulări făcute pe coduri random având alte lungimi şi rate arată că:

- cel mai mare C_G se obţine pentru j= 3
- pentru j ≥ 3, girth-ul mediu şi cel minim scad cu creşterea lui j (la aceeaşi rată), iar câştigul codării scade odată cu scăderea girth-ului. Aceasta deoarece dacă un bit intră în mai multe ecuaţii (*j* mai mare) şi numărul de biţi care intră într-o ecuaţie creşte (*k* mai mare), datorită păstrarii ratei de codare, după câteva iteraţii apar bucle în graful Tanner asociat deoarece lungimea cuvântului de cod este finită

- Un caz special în prezintă valoarea *j* = 2, care deşi are un girth mai mare, asigură un câştig al codării mai mic decât codurile generate cu *j* mai mare. Aceasta se explică prin numărul prea mic, *j* = 2, al ecuaţiilor de control în care intră fiecare bit şi implicit prin numărul mic de biţi cu care acesta intră în aceste ecuaţii.

Aceasta face ca valorile LLR-ului unui bit să se modifice puţin la fiecare iteraţie, chiar dacă buclele apar in graful Tanner după un număr mai mare de iteraţii.

b. Efectul lungimii cuvântului de cod

- Deoarece la punctul anterior s-a ajuns la concluzia că pentru $j = 3$ se obţin câştigurile maxime, se vor considera codurile cu $j = 3$ şi rată $R_c = 0.5$
- Tabelul 2 prezintă C_G şi girth-ul mediu pentu codurile cu $k = 6$ şi $j = 3$ şi trei valori ale lungimii cuvântului de cod N, iar figura 9 prezintă variaţiile BER vs. SNR ale acestor coduri.

Tabelul 2 →

	1200	480	240
g_{av}	7.27	6.8	6.21
C_G	10	8.6	7.7

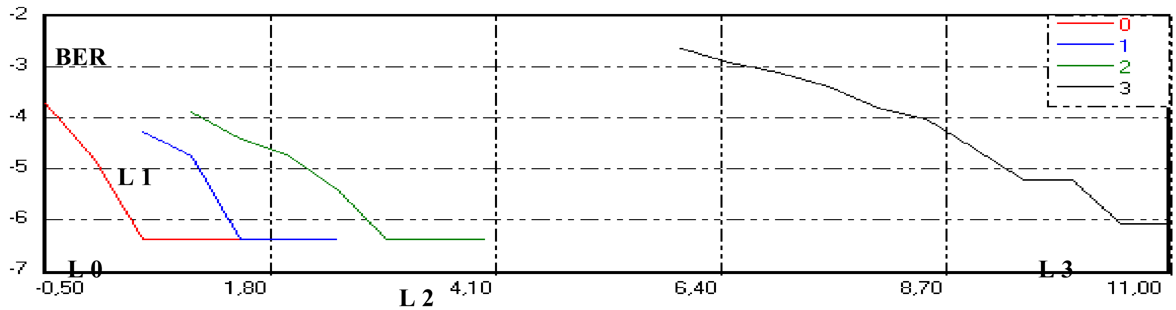

Figura 9 BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 2 R_c=0.5, k=6, j=3
Linia 0 – N=1200; Linia 1 – N=480; Linia 2 – N=240; Linia 3 – nc

- Rezultatele din figura 9 şi din alte simulări efectuate arată că, în general, creşterea lungimii cuvântului de cod conduce la creşterea câştigului codării deoarece vor apărea bucle pentru un număr mai mic de biţi la acelaşi număr de iteraţii
- Scăderea lui N sub N = 200 conduce la scăderea C_G la valori comparabile cu ale codurilor convoluţionale cu K = 7
- De aceea în aplicaţiile pe canale radio fixe, care au T_c mai mare, sunt utilizate coduri cu lungimi foarte mari ale cuvântului de cod (N = 16000, chiar 32000) care asigură câştiguri de 11-12 dB la rată R_c= 0.5.

c. Efectul ratei codului

- Efectul modificării ratei codului asupra C_G şi girth-ului este prezentat în tabelul 3 şi figura 10 pentru coduri cu j=3 şi N = 1200 biţi/cuvântul de cod.

	R_c=0.25	R_c=0.5	R_c=0.625	R_c=0.7
g_{av}	8.62	7.27	6.67	7.4
C_G	13	10	8.5	8

Tabelul 3

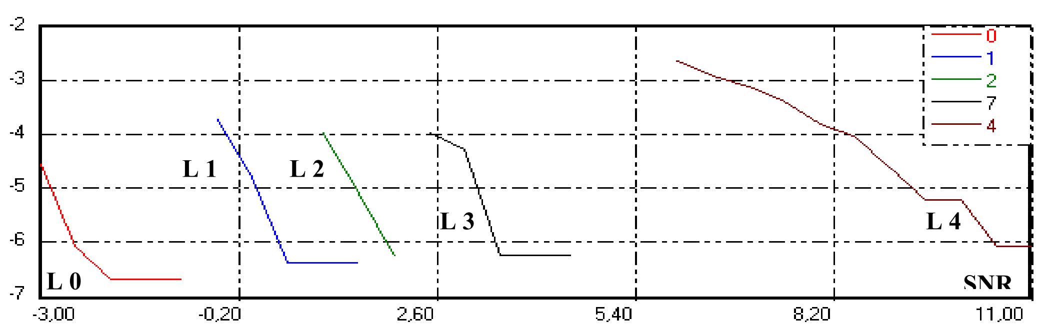

Figura 10. BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 3 N = 1200, j=3
Linia 0 – R_c=0.25 (k=4); Linia 1 - R_c=0.5 (k=6); Linia 2 – R_c=0.625 (k=8); Linia 3-R_c=0.7 (k=10); Linia 4 – nc

- Aşa cum era de aşteptat, la o lungime şi un tip de cod date, cel mai mare câştig al codării îl asigură codurile cu rata cea mai mică.
- Considerând un cod cu R_c = 1/4 şi modulaţia 16QAM → ca numărul de biţi utili este n=4·1/4=1bit/simb; probabilitatea de eroare de simbol $p_e = 10^{-5}$ se asigură la SNR =19.5-13=6.5 dB. O transmisie necodata ar asigura 1bit/simb folosind 2-PSK la SNR = 9.5 dB;
- Considerând acelaşi cod, dar o modulaţie 64+QAM → ca numărul de biţi utili este n=6·1/4=1,5bit/simb; probabilitatea de eroare de simbol $p_e = 10^{-5}$ se asigură la SNR =25.5-13=12.5 dB. O transmisie necodata ar asigura 2bit/simb folosind 4+QAM la SNR = 12.5 dB;

- Exemplele de mai sus arată utilizarea codurilor cu rată mică este rentabilă doar la valori mici ale SNR
- Datorită ratei mici aceste coduri au mai multe ecuaţii de control, deci mai multe constrângeri între biţi
- Codurile cu acelaşi rate şi aceeaşi lungime şi $j = 2$ au un girth mai mare, dar asigură un câştig mai mic datorită numărului mai mic de ecuaţii de control în care intră un bit
- Trebuie remarcat încă o dată compromisul între valoarea lui $j = 3$, şi valoarea girth-ului mediu.

d. Efectul numărului de iteraţii efectuate de decodor

- Valoarea C_G asigurată de un cod dat creşte odată cu creşterea numărului de iteraţii efectuate de algoritmul iterativ de decodare, de exemplu MP, înainte de oprirea decodării.
- Totuşi, efectuarea unui număr de iteraţii mai mare decât o valoare I, nu mai aduce o creştere suplimentară a C_G care să justifice întârzierea introdusă.
- Valoarea lui I depinde de lungimea minimă a buclelor din graful Tanner, şi implicit de tipul codului, de rata şi de lungimea acestuia.
- Simulările efectuate au arătat că $I = 25$ reprezintă un compromis rezonabil între câştigul asigurat şi întârzierea introdusă

1.7.2. Prescurtarea codurilor LDPC

- Prescurtarea codurilor LDPC se realizează pentru unul din următoarele scopuri:

a. adaptarea lungimii cuvântului de cod la dimensiunile pachetului de date ce poate fi transmis de un anumit sistem de transmisie

b. obţinerea unor rate de codare ce nu pot fi obţinute prin construcţia codului.

c. pentru a obţine un cod de rată dată, care să asigure un C_G mai mare decât un cod complet construit direct la acea rată.

- Deoarece numărul de biţi de control rămâne acelaşi, rata codului prescurtat e mai mică decât rata codului „părinte”:

$$R_c' = (N-M-U)/(N-U) < R_c \tag{28}$$

- Prescurtarea poate fi făcută în două moduri: prin suprimarea celor mai din dreapta U coloane ce corespund ultimilor U biţi de informaţie (notată cu CS) sau prin suprimarea a U coloane, din cele N-M ale biţilor info, care au girth-ul cel mai mic (notată cu GS)
- Pentru exemplificare în figura 11 se prezintă curbele BER vs. SNR ale unor coduri cu rată R_c= 0.4 având k=6 and j=3 şi lungimi de 977 sau 960 biţi/ cuvântul de cod.
- Primele două coduri au fost obţinute prin prescurarea unui cod cu N’= 1200 biţi şi rată R_c’= 0.5 la o lungime de N = 977 biţi, obţinându-se rata R_c= 0.39. Prescurtarea a fost făcută fie cu metoda GS (linia roşie), fie cu CS (linia albastră).
- Al treilea cod (linia verde) a fost generat direct la lungimea de N = 960 biţi cu rata R_c = 0.4.

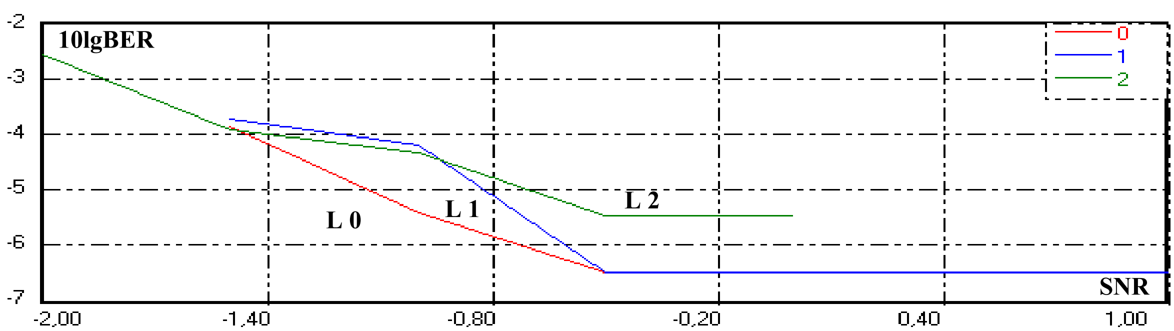

Figura 11. BER vs. SNR ale codurilor prescurtate; R_c=0.39 sau 0.4, j=3 şi k = 6
Linia 0 – GS N=977; Linia 1 – CS; N= 977; Linia 2 – cod neprescurtat N= 960

- Codurile prescurtate asigură un câştig al codării mai mare decât cel neprescurtat deoarece girth-rile lor medii sunt mai mari, 8.19 şi 7.6 faţă de 7.27 al codului neprescurtat.
- De asemenea prescurtarea selectivă pe bază de girth (GS) aduce un câştig mai mare, cu circa 0.3 dB, decât cea neselectivă (CS), datorită creşterii girth-ului mediu.

1.7.3. Performanţele codurilor LDPC de tip array

- Câştigurile codării asigurat de codurile LDPC de tip array, la o aceeaşi lungime, rată şi valori ale k şi j sunt mai mici decât cele ale asigurate de codurile LDPC random, datorită şi faptului că girth-ul mediu al codurilor array este mai mic, el nedepăşind valoarea 6, datorită modalităţii de construcţie a acestor coduri.

- Spre exemplificare în figura 12 sunt prezentate curbele BER vs. SNR a patru coduri LDPC random şi a unui cod LDPC array cu lungimea N = 1200 şi rata R_c = 0.5.

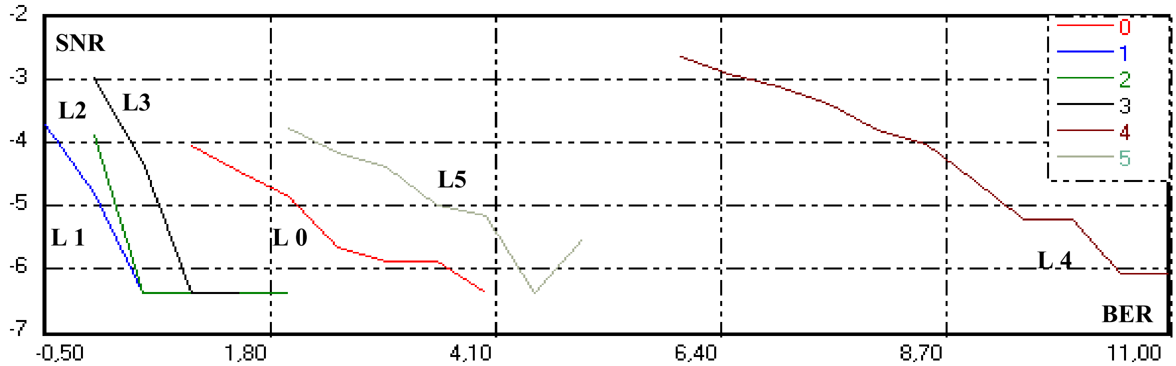

Figura 12. BER vs. SNR ale unor coduri random şi array
Linia 0 – random k=4, j=2; Linia 1 – random k=6, j=3; Linia 2 –random k=8, j=4; Linia 3 – random k=10, j=5; Linia 4 – necodat Linia 5 – triangularizat (array)

- Codul array (linia gri) are un câştig (6,5 dB) sensibil mai mic decât cele ale codurilor random, care variază între 7 şi 10 dB, în funcţie de valorile parametrilor *k* şi *j*. Valoarea girth-ului mediu al codului array este 5.25, pe când girthurile codurilor random variază între 7.25 (j = 3) până la 12.26 (j = 2).
- Şi la lungimi mai mici ale cuvântului de cod, codurile de tip random asigură câştiguri mai mari decât codurile de tip array, dar diferenţa între câştiguri scade cu scăderea lungimii cuvântului de cod.
- Spre exemplificare în figura 13 sunt prezentate curbele BER vs. SNR ale unor coduri random şi a unui cod array cu N = 240 biţi şi rata R_c = 0.5.

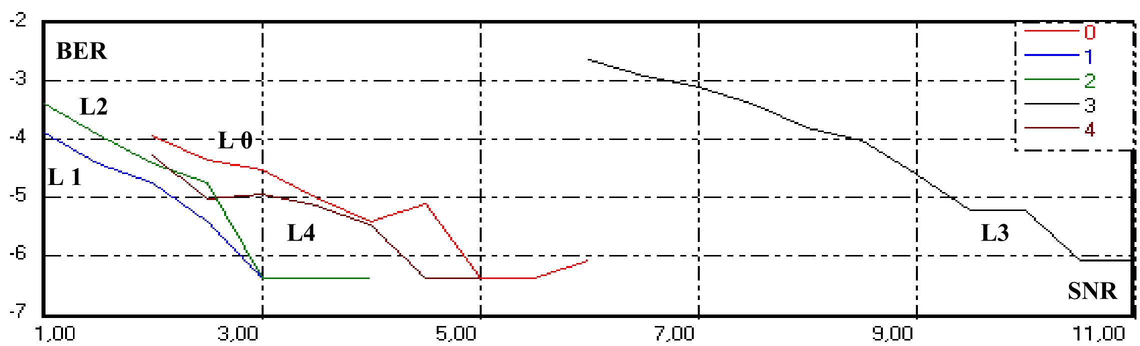

Figura 13 BER vs. SNR ale unor coduri random şi de array
Linia 0 – random k=4, j=2; Linia 1 – random k=6, j=3; Linia 2 – random k=8, j=4; Linia 3 – nc
Linia 4 – cod arrav cu rata 0.5:

- În acest caz diferenţa dintre cel mai puternic cod random şi codul array e de doar 2 dB, iar codul array poate asigura un câştig al codării mai mare decât unele coduri random mai puţin performante, având j = 2.

Concluzii

- Dintre clasele decoduri menţionate, codurile random asigură câştigurile cel mai mari. Există coduri LDPC random care, pentru rate scăzute, se apropie de la câteva zecimi de decibeli de limta teoretică a lui Shannon şi au performanţe comparabile cu (sau chiar mai bune decât) turbocodurile.
- Codurile "array-based" asigură câştiguri mai mici decât cele random, diferenţele depinzând de lungimea şi rata studiate.
- Câştigul codării asigurat creşte odată cu scăderea ratei codului
- La o rată dată, câştigul codării creşte (de obicei) cu creşterea lungimii cuvântului de cod
- Câştigul codării e maxim pentru valori mici ale parametrului j, dar trebuie ca j > 2
- Pentru un cod dat, C_G creşte cu creşterea numărului de iteraţii efectuate de algoritmul de decodare MP; trebuie însă menţionat că la mărirea numărului de iteraţii efectuate peste 25, C_G suplimentar este extrem de mic, faţă de cel obţinut cu 25 de iteraţii, nejustificând creşterea timpului de decodare indusă.
- Performanţele codurilor LDPC vor fi studiate la laborator.

[1] Lab Transmisiuni de date, UTCN, "Study of the Girth Characteristics of some LDPC Codes and their Influence upon the BER Performances", Research Report